Anisotropie-Effekte in der Gravitationstheorie Einsteins *

JOACHIM RUFFER

Institut für Theoretische Physik der Universität Freiburg i. Br.

(Z. Naturforschg. **21 a**, 1821—1825 [1966]; eingegangen am 13. Juli 1966)

The use of an EUCLIDean space in astronomy corresponds in the framework of general relativity to the introduction of an EUCLIDean "space of comparison". We generalize this method till now used only in special cases and analyse the motion of test particles in the EUCLIDean space of comparison. The inertial mass of test particles is a tensor in the space of comparison. Independent of any CORIOLIS force the mass tensor is able to cause anisotropy effects that can be observed on principle.

Die bekannten drei allgemein-relativistischen Effekte (Periheldrehung der Merkurbahn, Lichtablenkung in der Nähe der Sonne, Rotverschiebung von Spektrallinien im Gravitationsfeld) lassen sich bekanntlich mit Hilfe einer Modellvorstellung beschreiben, in welcher der dreidimensionale Erfahrungsraum des Beobachters als euklidisch vorausgesetzt wird und der Ablauf der Zeit durch die Eigenzeit des Beobachters bestimmt ist. Der Einfluß des Gravitationsfeldes wird hierbei durch eine fiktive Veränderung der physikalischen Größen wie Längen, Zeiten, Massen usw. [1] beschrieben. So wird z. B. die Lichtgeschwindigkeit als vom Gravitationspotential abhängig angenommen, und dies führt nach dem HUYGENSschen Prinzip unmittelbar zur Lichtablenkung im Gravitationsfeld der Sonne.

Derartige Modellvorstellungen wurden bisher nur für statische isotrope 4-Metriken untersucht. Im folgenden wird dargestellt, wie dieses Verfahren der Zugrundelegung eines dreidimensionalen euklidischen „Vergleichsraumes" auf nicht-statische und nicht-isotrope 4-Metriken ausgedehnt werden kann. Bei dieser Darstellung der EINSTEINschen Theorie werden zwar keine neuartigen physikalischen Ergebnisse erlangt, doch wird hierbei die Darstellung im Prinzip beobachtbarer Effekte durch die Bezugnahme auf die speziell-relativistische Mechanik besonders einfach und durchsichtig. Insbesondere wird es damit möglich, den Begriff der "Anisotropie" im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie zu präzisieren.

Den Anstoß zur Untersuchung von Anisotropie-Erscheinungen gaben Arbeiten von COCCONI und SALPETER, sowie von PEEBLES und DICKE [2]. Die Theorien dieser Autoren, welche auf einer speziellen (und u. E. weitgehend willkürlichen) Auslegung des MACHschen Prinzips beruhen, postulieren eine tensorielle träge Masse und führten erstmalig zur Vermutung, daß möglicherweise Anisotropie-Effekte bei reinen („lokalen") Laboratoriumsexperimenten auftreten (z. B. bei der Messung des ZEEMAN-Effektes) [3]. Nach der allgemeinen Relativitätstheorie können jedoch derartige lokale Experimente — worauf vor allem WEBER hingewiesen hat [4] — grundsätzlich zu keinen positiven Ergebnissen führen.

Die Verhältnisse liegen dagegen anders, wenn es sich um eine „nicht-lokale" Beobachtung physikalischer Erscheinungen innerhalb *endlich ausgedehnter* Raumbereiche handelt, d. h. wenn sich das beobachtete Objekt und der Beobachtungsort an verschiedenen Raumstellen befinden [5]; ein Fall, der in der Regel bei *astronomischen* Beobachtungen vorliegt. Bei der Formulierung der Bewegungsgleichungen für Probekörper unter Zugrundelegung eines euklidischen Vergleichsraumes und der Beobachterzeit tritt nämlich ein tensorieller Massenfaktor auf, der zu Anisotropie-Effekten bei nicht-lokaler Beobachtung Anlaß geben könnte.

Im folgenden wird die Bewegungsgleichung für Probekörper im euklidischen Vergleichsraum abgeleitet und untersucht, unter welchen Bedingungen

* Dissertationsauszug, Freiburg 1965.

[1] H. DEHNEN, H. HÖNL u. K. WESTPHAL, Ann. Phys. **6**, 370 [1960]. — R. D'E. ATKINSON, Proc. Roy. Soc. London A **272**, 60 [1963].

[2] G. COCCONI u. E. SALPETER, Nuovo Cim. **10**, 646 [1958]; Phys. Rev. Letters **4**, 176 [1962]. — P. J. PEEBLES u. R. H. DICKE, Phys. Rev. **127**, 629 [1960]; Ann. Phys. New York **20**, 240 [1960].

[3] Innerhalb der erreichbaren Meßgenauigkeit blieben die experimentellen Untersuchungen ergebnislos, s. V. W. HUGHES, MACHS Principle and Experiments on Mass Anisotropy, in Gravitation and Relativity, herausgeg. von CHIU u. HOFFMANN; W. A. Benjamin, Inc., New York 1963.

[4] J. WEBER, General Relativity and Gravitational Waves, Interscience Publishers, Inc., New York 1961, S. 161 ff.

[5] Beispielsweise ist die Rotverschiebung von Spektrallinien im Gravitationsfeld in diesem Sinne ein „nichtlokaler" Effekt. Er läßt sich nur feststellen, sofern Lichtquelle und Beobachter durch eine *endliche* räumliche Strecke voneinander getrennt sind.

der Massentensor beobachtbare Anisotropie-Effekte hervorruft. Zum Schluß wird ein einfaches Beispiel für einen derartigen anisotropen Massentensor angegeben.

1. Bewegungsgleichung für Probekörper

Wir gehen von der Bewegungsgleichung eines Probekörpers aus, der ausschließlich gravitionellen Kräften ausgesetzt ist (Geodätengleichung; griechische Indizes laufen von 1 bis 4, lateinische Indizes von 1 bis 3):

$$\frac{\Delta (m_0 U^\mu)}{\Delta \tau} \equiv \frac{\mathrm{d}(m_0 U^\mu)}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} (m_0 U^\lambda) = 0; \qquad (1)$$

hierbei ist $m_0 U^\mu = m_0 \cdot \mathrm{d}x^\mu / \mathrm{d}\tau$ der 4-Impuls des Teilchens, m_0 seine Ruhmasse (in einem Inertialsystem) und τ die Eigenzeit des Teilchens; die Signatur des Fundamentaltensors $g_{\mu\nu}$ sei $(+++-)$. Bei Einwirkung einer nicht-gravitionellen 4-Kraft F^μ auf den Probekörper ist (1) durch

$$\frac{\Delta (m_0 U^\mu)}{\Delta \tau} = F^\mu \qquad (2)$$

zu ersetzen. Die Gln. (1) bzw. (2) enthalten keine Information über das physikalische System (Beobachter), bezüglich dessen die Bahn des Teilchens registriert wird. Ein solches Bezugssystem soll im folgenden durch ein zeitartiges 4-Vektorfeld u^μ, $u_\nu u^\nu = -1$, dargestellt werden, das als Feld der 4-Geschwindigkeiten einer Beobachterschar gedeutet werden kann [6]. Hierbei sind die Beobachter mit elementaren physikalischen Meßinstrumenten wie Maßstäben, Normaluhren, Einheitsmassen usw. ausgerüstet zu denken. Das 4-dimensionale Raum-Zeit-Kontinuum spaltet dann für jeden Beobachter lokal auf: in einen 3-dimensionalen, mit Hilfe von Maßstäben ausmeßbaren Erfahrungsraum (orthogonal zu den Weltlinien der Beobachter) und in den durch Normaluhren verfolgbaren Zeitablauf (längs der Weltlinien der Beobachter). In einem Koordinatensystem, das gegenüber der Beobachterschar ruht, d. h. in dem gilt

$$u^\mu = \delta_4{}^\mu / \sqrt{-g_{44}}, \quad u^\mu = \mathrm{d}x^\mu / i\,\mathrm{d}s, \qquad (3)$$

zerfällt demnach das Quadrat des 4-Linienelementes ($\mathrm{d}s^2$) in das Quadrat des Linienelementes im 3-dimensionalen Erfahrungsraum

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \gamma_{mn}\, \mathrm{d}x^m\, \mathrm{d}x^n, \quad \gamma_{mn} = g_{mn} - g_{4m}\, g_{4n}/g_{44} \qquad (4)$$

und das Quadrat des Zeitelementes ($\mathrm{d}T$), das ein Beobachter bei einer Verschiebung um $\mathrm{d}x^\mu$ an den synchron gestellten Uhren des Beobachterfeldes abliest:

$$\mathrm{d}T^2 = \varepsilon_\mu\, \varepsilon_\nu\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu, \quad \varepsilon_\mu = g_{4\mu}/\sqrt{-g_{44}} \qquad (5)$$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\sigma^2 - \mathrm{d}T^2. \qquad (6)$$

Die Gln. (1) für die geodätische Bewegung eines Probekörpers können nach DEHNEN [7] bezüglich der gegebenen Beobachterschar in Bewegungsgleichungen im NEWTON–LAGRANGEschen Sinne umgeformt werden:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}T}\left(\frac{m_0}{\mathcal{L}} V_m\right) = \frac{m_0}{\mathcal{L}} \Big\{ \frac{1}{\varepsilon_4} (\varepsilon_{m|4} - \varepsilon_{4|m}) + V^l (\varepsilon_{m|l} - \varepsilon_{l|m}) + \frac{Vl}{\varepsilon_4} [\varepsilon_m (\varepsilon_{l|4} - \varepsilon_{4|l}) + \varepsilon_l (\varepsilon_{4|m} - \varepsilon_{m|4})] \Big\}. \qquad (7)$$

Links steht die totale zeitliche Änderung des Impulses $P_k = (m_0/\mathcal{L}) V_k$, kovariant gegenüber Transformationen der Art $x'^l = f^l(x^m)$, $x'^4 = f^4(x^\mu)$, welche (3) ungeändert lassen; rechts stehen die Kräfte, die auf das Teilchen wirken. Als träge Masse ist der Ausdruck $(m_0/\mathcal{L})$ anzusehen. Es bedeuten ferner:

$$\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}T}; \quad V^\lambda = \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}T}; \quad V_m = \gamma_{mn} V^n;$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}T}(P_k) = P_{k;\mu} V^\mu + \frac{\varepsilon_k}{2\,\varepsilon_4} \gamma_{mn|4} V^m P^n; \qquad (8)$$

$$P_{k;\mu} = P_{k|\mu} - \Gamma_{\varrho|k\mu} P^\varrho;$$

$$\Gamma_{\varrho|\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{2} (\gamma_{\varrho\varkappa|\lambda} + \gamma_{\varrho\lambda|\varkappa} - \gamma_{\lambda\varkappa|\varrho});$$

$$\varepsilon_{\mu|\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}(\varepsilon_\mu); \qquad \gamma_{mn|\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}(\gamma_{mn}) \qquad (8\,\mathrm{a})$$

2. Einführung der euklidischen Vergleichsmetrik

Die Astronomie kennt keine 3-parametrigen, den Raum überdeckenden Beobachterscharen; ein beobachtender Astronom entspricht einem einzelnen,

[6] F. A. E. PIRANI, in: Les Théories Relativistes de la Gravitaton, Paris CNRS 1962, S. 85 ff. — H. DEHNEN, Z. Phys. **179**, 76 [1964].

[7] H. DEHNEN, Ann. Phys. Leipzig **13**, 101 [1964]; die Gl. (1) wird hierbei mit Hilfe des Projektionsoperators $h_\nu{}^\mu$:

$$h_\nu{}^\mu = \delta_\nu{}^\mu - \frac{1}{g_{44}} \delta_4{}^\mu g_{\nu 4}; \qquad h_\nu{}^\mu h_\lambda{}^\nu = h_\lambda{}^\mu; \quad h_\mu{}^\mu = 3$$

in den Ruhraum der Beobachter projiziert.

isolierten Beobachter. Ein solcher isolierter Beobachter wird auf Grund von Lichtsignalen und anderen Informationen ein Modell der Vorgänge in seiner Umgebung zu konstruieren versuchen, wobei ihm als Zeitparameter allein seine Eigenzeit ϑ und als Metrik des 3-Raumes die Metrik γ^*_{mn} seiner unmittelbaren Umgebung zur Verfügung steht. Indem der Astronom den an Uhren abgelesenen Zeitablauf ϑ und die Metrik γ^*_{mn}, die er als *euklidische* Metrik anzusehen gewohnt ist, auf den *gesamten Raum extrapoliert,* wird hiermit eine „Vergleichszeit" und ein „Vergleichsraum" eingeführt. Entsprechend der Annahme einer euklidischen Vergleichsmetrik wird $R^*_{ijln} = 0$. Gemäß diesen Voraussetzungen haben wir die Gl. (7) nun so umzuformen, daß sie bezüglich der Vergleichsmetrik γ^*_{mn} [und nicht mehr bezüglich der Erfahrungsmetrik γ_{mn}, s. (4)] eine Vektorgleichung darstellt und somit als die Bewegungsgleichung eines Probekörpers vom Standpunkt des astronomischen Beobachters angesehen werden kann. Aus

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}T}(P_m) = K_m \tag{9}$$

wird auf diese Weise eine Gleichung der Gestalt

$$\frac{\mathrm{D}^*}{\mathrm{D}\vartheta}(p_m) = K^*_m \tag{10}$$

hervorgehen, wobei die Differentiation $\mathrm{D}^*/\mathrm{D}\vartheta$ auf die Vergleichsmetrik γ^*_{mn} zu beziehen ist.

Hierzu ist zunächst der Zeitparameter T durch eine Parametertransformation in die Eigenzeit ϑ zu überführen. Aus (7) folgt nach Substitution von T durch ϑ

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\vartheta}(p_m) = \frac{m_0}{L}\,\varepsilon_\nu\, v^\nu \left\{ v^4(\varepsilon_{m|4} - \varepsilon_{4|m}) + v^l(\varepsilon_{m|l} - \varepsilon_{l|m}) + v^l \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_4}(\varepsilon_{l|4} - \varepsilon_{4|l}) \right\}; \tag{11}$$

mit

$$L = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\vartheta}, \qquad v^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\vartheta}, \qquad p_m = \gamma_{mn}\, v^n (m_0/L). \tag{11 a}$$

Zur Umformung der kovarianten Ableitung $\mathrm{D}/\mathrm{D}\vartheta$ benötigen wir weiterhin eine Beziehung zwischen der Erfahrungsmetrik γ_{mn} und der Vergleichsmetrik γ^*_{mn}. Postulieren wir einen *linearen* Zusammenhang zwischen γ_{mn} und γ^*_{mn} vermöge eines Tensors :

$$M^{*r}_{\ n} = \gamma^{*rl}\,\gamma_{ln}, \tag{12}$$

wonach

$$\gamma_{mn} = M^{*r}_{\ m}\,\gamma^*_{rn}, \tag{13}$$

so folgt bei Verwendung von (13) nach einfacher Rechnung

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\vartheta}(p_m) = p_{m|\mu} v^\mu - \tfrac{1}{2}\gamma^{*rn}\, p_n\, \gamma^*_{sr|m}\, v^s - \frac{m_0}{2L} v^k v^l \gamma^*_{kr} M^{*r}_{\ l|m} + \frac{m_0}{2L}\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_4}\gamma^*_{rl} M^{*l}_{\ k|4} v^k v^r, \tag{14}$$

und mit Rücksicht auf (8)

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\vartheta}(p_m) = \left\{\frac{\mathrm{D}^*}{\mathrm{D}\vartheta}(p_m)\right\} - \frac{m_0}{2L} v^k v^l \left\{ \gamma^*_{kr} M^{*r}_{\ l;*m} - \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_4}\lambda^*_{lr} M^{*\,r}_{\ k|4} \right\}. \tag{15}$$

Aus (7) gewinnen wir damit die endgültige Bewegungsgleichung in der Gestalt von (10):

$$\frac{\mathrm{D}^*}{\mathrm{D}\vartheta}(p_m) = \frac{m_0}{L}\,\varepsilon_\nu\, v^\nu \left\{ v^l(\varepsilon_{m|l} - \varepsilon_{l|m}) + v^4(\varepsilon_{m|4} - \varepsilon_{4|m}) + v^l\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_4}(\varepsilon_{l|4} - \varepsilon_{4|l}) \right\} + \frac{m_0}{2L} v^l v^k \left\{ \gamma^*_{kr} M^{*r}_{\ l;*m} - \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_4}\gamma^*_{kr} M^{*r}_{\ l|4} \right\} \tag{16}$$

3. Diskussion der Bewegungsgleichung

Die Kraft K^*_m [rechte Seite von Gl. (16)] enthält zunächst einen Anteil G_m, der als (vereinigte) Gravitations- und „Coriolis"-Kraft zu deuten ist:

$$G_m = \frac{m_0}{L}\,\varepsilon_\nu\, v^\nu \left\{ v^4(\varepsilon_{m|4} - \varepsilon_{4|m}) + v^l(\varepsilon_{m|l} - \varepsilon_{l|m}) + v^l\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_4}(\varepsilon_{l|4} - \varepsilon_{4|l}) \right\}; \tag{17}$$

hinzu tritt noch eine weitere Kraft Z_m:

$$Z_m = \frac{m_0}{2L} v^l v^k \left\{ \gamma^*_{kr} M^{*r}_{\ l;*m} - \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_4}\gamma^*_{kr} M^{*r}_{\ l|4} \right\}, \tag{18}$$

die quadratisch von der Relativgeschwindigkeit $\{v^l\}$ des Probekörpers abhängt. Bei kleinen Relativgeschwindigkeiten wird deshalb Z_m gegenüber G_m vernachlässigt werden können.

Der lineare Zusammenhang zwischen Impuls- und Geschwindigkeitskomponenten im Erfahrungsraum

$$p_m = (m_0/L)\ \gamma_{mn}\, v^n \tag{19}$$

bleibt gemäß (12) auch im Vergleichsraum bestehen:

$$p_m = \left(\frac{m_0}{L}\ M^{*r}_{m}\right)\ \gamma^{*}_{rn} v^n = \left(\frac{m_0}{L}\ M^{*r}_{m}\right) v^{*}_{r}. \tag{20}$$

Hiernach entspricht bei Zugrundelegung der üblichen Impulsdefinition der trägen Masse ein *Massentensor*

$$\mu^r_n = (m_0/L)\ M^{*r}_{n}. \tag{21}$$

Der skalare Faktor (m_0/L) enthält u. a. die speziell-relativistische Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse, während im zweiten, tensoriellen Faktor im allgemeinen eine *Anisotropie der trägen Masse* im Vergleichsraum zum Ausdruck kommt. Es sind demnach *isotrope* und *anisotrope* Massentensoren zu unterscheiden, je nachdem die Eigenwerte μ_s von μ^r_l einander im ganzen Raum gleich sind oder verschiedene Werte annehmen: Wir sprechen von einer *isotropen* Masse, wenn

$$\mu^r_l = \mu\ \delta^r_l\,, \tag{22}$$

von einer *anisotropen* Masse, wenn die Diagonalform von μ^r_l

$$\mu^r_l = \mu_l\ \delta^r_l, \tag{23}$$

mit $\mu_r \neq \mu_s$ für mindestens ein Indexpaar (r, s) $r \neq s$.

Die Eigenschaften (22) bzw. (23) des Massentensors sind nach (12) zugleich Aussagen über den Zusammenhang von Erfahrungsraum und Vergleichsraum. Hiernach treten isotrope Massen dann und nur dann auf, wenn

$$\gamma_{mn} = \gamma\ \overset{*}{\gamma}_{mn}\,, \tag{24}$$

d. h. wenn Erfahrungsraum und Vergleichsraum konform aufeinander abbildbar sind. Notwendig und hinreichend hierfür ist bei euklidischem $\overset{*}{\gamma}_{mn}$ [8]:

$$\tilde{R}_{ijk} \equiv 0\,, \tag{25}$$

wobei [vgl. auch (8 a)]

$$\tilde{R}_{ijk} = \tilde{R}_{ij;k} - \tilde{R}_{ik;j} + \tfrac{1}{4}\,(\gamma_{ik}\,\tilde{R}_{|j} - \gamma_{ij}\,\tilde{R}_{|k}) \tag{26}$$

und $\tilde{R}_{ij}$ der Ricci-Tensor der Erfahrungsmetrik γ_{mn} ist. Die Isotropieeigenschaften von $\mu_l{}^r$ können mit der Zeit x^0 veränderlich sein. Die Klassifikation des Massentensors bezieht sich daher im allgemeinen auf beliebige, aber feste Zeiten $x_f{}^0$.

[8] J. A. Schouten, Math. Z. **11**, 58 [1921]. — L. P. Eisenhart, Riemannian Geometry, Princeton University Press, Princeton 1949.

4. Beispiel: Rotierendes Bezugssystem

Das Kriterium (25) gestattet anzugeben, für welche Beobachter (Astronomen) bei vorgegebener Raum-Zeit anisotrope träge Massen im Vergleichsraum auftreten. Beispielsweise sind in der Schwarzschild-Welt und im Einstein-Kosmos für Beobachter, die gegenüber der Zentralmasse, bzw. der homogen verteilten Materie ruhen, die Massentensoren von Probekörpern erwartungsgemäß isotrop. Beobachter in der Minkowski-Welt hingegen, die um eine feste Achse (z-Achse) im 3-dimensionalen Raum mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotieren, registrieren *anisotrope* Massen der Probekörper, da in diesem Falle

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{212} &= -\tilde{R}_{221} = -\frac{6\,r^3\,\omega^4/c^4}{(1-r^2\,\omega^2/c^2)^4}\,, \\ \tilde{R}_{313} &= -\tilde{R}_{331} = \frac{6\,r\,\omega^4/c^4}{(1-r^2\,\omega^2/c^2)^3}\,, \end{aligned} \tag{27}$$

sonst $\tilde{R}_{lmn} \equiv 0$ (Zylinderkoordinaten r, φ, z und $x^0 = t$). Die Metrik des Erfahrungsraumes hat die Gestalt

$$\gamma_{mn} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{r^2}{1-r^2\cdot\omega^2/c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}. \tag{28}$$

Der Massentensor $\mu_l{}^r$ besitzt gemäß (12) und (21) die Form

$$\mu^r_l = \frac{m_0}{L} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1-r^2\cdot\omega^2/c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \tag{29}$$

und ist demnach im Sinne von (23) *anisotrop*. Die Coriolis-Kräfte C_m, gegeben durch [9]

$$\begin{aligned} C_m = \frac{m_0}{L}\,\varepsilon_\nu\, v^\nu\ v^l\ \Big\{ (\varepsilon_{m|l} - \varepsilon_{l|m}) + \frac{1}{\varepsilon_4}\,[\varepsilon_l(\varepsilon_4|_m - \varepsilon_m|_4) \\ - \varepsilon_m(\varepsilon_{4|l} - \varepsilon_{l|4})\,]\Big\}, \end{aligned} \tag{30}$$

ergeben sich im vorliegenden Fall zu

$$C_m = \omega\ \frac{2\,r\,c^2}{\sqrt{c^2 - r^2\,\omega^2}} \begin{pmatrix} v^2 \\ -v^1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{m_0}{L}\ \varepsilon_\nu\, v^\nu, \tag{31}$$

$\{v^i\}$ ist dabei die Relativgeschwindigkeit des Probekörpers.

Für kleine ω werden hiernach die Anisotropie-Effekte hervorrufenden Coriolis-Kräfte direkt pro-

[9] H. Dehnen, Ann. Phys. Leipzig **13**, 101 [1964].

portional ω, während der anisotrope Bestandteil des Massentensors ω^2 proportional ist. Entsprechend bleiben die durch die Massenanisotropie hervorgerufenen Effekte klein gegenüber den durch die Kräfte ausgelösten Erscheinungen.

5. Abschließende Bemerkungen

Bei gegebener 4-Metrik $g_{\mu\nu}$ bestimmt die Festlegung der Beobachter-4-Geschwindigkeiten u^μ die Erfahrungsmetrik γ_{mn} sowie die Größen ε_μ. Mit γ_{mn} und ε_μ wiederum sind Massentensor und CORIOLIS-Kräfte festgelegt. Hiernach könnte vermutet werden, daß zwischen Massen- und Kräfteanisotropie eine möglicherweise enge Verbindung besteht. Wie aus den Gln. (17), (18) und (30) für die Kräfte sowie (21) und (12) für die Massen ohne weiteres zu erkennen ist, besteht jedoch *kein* unmittelbarer und übersichtlicher Zusammenhang zwischen Massenanisotropie und Kräfteanisotropie.

Die vorangegangenen Betrachtungen bestätigen nochmals [s. Gln. (7) und (11)], daß für *lokale* Experimente Anisotropie-Effekte nur durch die CORIOLIS-Kräfte (30) verursacht werden. In endlich ausgedehnten Raumbereichen jedoch treten nach den Gln. (16) bei *„nicht-lokaler"* Beobachtung auch noch Anisotropie-Effekte auf, die im *Massentensor* ihre Ursache haben. Bei Zugrundelegung einer Vergleichsmetrik (das hier benutzte Verfahren entspricht der Verwendung einer euklidischen Metrik in der Astronomie) kann es demnach Anisotropie hinsichtlich der Kräfte *und* der Massen geben. Die Massenanisotropie wird dabei durch die Vergleichsmetrik gewissermaßen „erzeugt". Wie man leicht nachprüft, sind indes für die bisher bekannten astronomisch interessanten 4-Metriken und Beobachter die durch bloße Massenanisotropie hervorgerufenen Effekte (beispielsweise die Präzession des Drehimpulses eines Planetenmondes) im allgemeinen unbeobachtbar klein gegenüber dem Effekt der Kräfte-Anisotropie. Es besteht daher zur Zeit keine Hoffnung, den Einfluß der Massenanisotropie auf die Effekte vom Gesamteffekt abzusondern.

Herrn Prof. H. HÖNL bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit, die Möglichkeit, sie an seinem Institut auszuführen, und für zahlreiche Ratschläge zu großem Dank verpflichtet. Herrn Dr. H. DEHNEN danke ich herzlich für viele wertvolle und klärende Diskussionen.